A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT IV

Galowice, 27 marca 2013

Lista 17

ZADANIE 1. Niech $T : X \to Y$ będzie operatorem liniowym ciągłym i „na” pomiędzy przestrzeniami Banacha. Wykazać, że istnieje $\epsilon > 0$, taki że każdy inny operator liniowy ciągły $S : X \to Y$ spełniający $\|T - S\| < \epsilon$ jest „na”.

ROZWIĄZANIE. Jeli T jest “na”, to jest odwzorowaniem otwartym, co oznacza, że istnieje $r > 0$, takie że obraz kuli jednostkowej w X zawiera r-kulę wokół zera w Y:

$$T(B_1) \supset K_r.$$

Pokażemy, że $\|T - S\| < r$ implikuje, że S jest “na” (a raczej pokażemy, że jeśli S nie jest “na”, to $\|T - S\| \geq r$). Niech $S : X \to Y$ będzie operatorem, który nie jest “na”. Wtedy $S(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią właściwą w Y. Zatem istnieje wektor $y \notin S(X)$. Z zupełności Y, odległość $l = d(y, S(X))$ jest dodatnia (będziemy mogli przez nią dzielić). Ustalmy dowolny $\epsilon > 0$. Istnieje $y_1 \in S(X)$, taki że $\|y - y_1\| < l(1 + \epsilon)$. Oznaczmy $y_2 = \frac{r}{l(1+2\epsilon)}(y - y_1)$. Ten wektor spełnia dwie nierówności: jego odległość od podprzestrzeni $S(X)$ wynosi

$$d(y_2, S(X)) = d(\tfrac{r}{l(1+2\epsilon)}(y - y_1), S(X)) =$$
$$\frac{r}{l(1 + 2\epsilon)} d(y, \tfrac{l(1+2\epsilon)}{r} S(X) + y_1) = \frac{r}{l(1 + 2\epsilon)} d(y, S(X)) = \frac{r}{1 + 2\epsilon},$$

a jego norma wynosi

$$\|\tfrac{r}{l(1+2\epsilon)}(y - y_1)\| = \frac{r}{l(1 + 2\epsilon)}\|y - y_1\| \leq \frac{r}{l(1 + 2\epsilon)} l(1 + \epsilon) < r.$$

Zatem $y_2 \in K_r$, co oznacza, że jest obrazem pewnego $x \in B_1$: $T(x) = y_2$, $\|x\| \leq 1$. Ale $S(x) \in S(X)$ zatem

$$\|T - S\| \geq \|(T - S)(x)\| = \|T(x) - S(x)\| = \|y_2 - S(x)\| \geq d(y_2, S(X)) \geq \frac{r}{1 + 2\epsilon}.$$

Ponieważ to jest prawda dla dowolnego $\epsilon > 0$, mamy $\|T - S\| \geq r$.

ZADANIE 2. Niech X oznacza przestrzeń ciągów (rzeczywistych lub zespolonych), mających tylko skończenie wiele wyrazów niezerowych, z normą supremum. Operator $T : X \to X$ jest zadany wzorem $T((x_n)_{n\geq 1}) = (\frac{x_n}{n})_{n\geq 1}$. Pokazać, że T jest ciągły i odwracalny, ale mimo to T^{-1} nie jest ciągły. Dlaczego to nie przeczy twierdzeniu o odwzorowaniu odwrotnym?

ZADANIE 3. Na przestrzeni liniowej X zadane są dwie normy zupełne $\|\cdot\|$ i $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$. Pokazać, że albo normy te są lipschitzowsko równoważne (tzn. istnieją stałe $0 < c \leq d < \infty$, takie że $c\|\cdot\| \leq |\!|\!|\cdot|\!|\!| \leq d\|\cdot\|$), albo są nieporównywalne (żadna nie jest słabsza od drugiej w sensie generowanej topologii).

ZADANIE 4. X_1, X_2 są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X, takimi że każdy element $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Pokazać, że istnieje stała c, taka że $\|x_1\| + \|x_2\| \leq c\|x\|$ (dla każdego $x \in X$). *Wsk. Rozważ odpowiedni operator $T : X \to X_1 \times X_2$.*

ZADANIE 5. Załóżmy, że ciąg dwustronny ograniczony $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ liczb zespolonych jest tak dobrany, że operator T określony na $C(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) wzorem

$$Tf(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \hat{f}(n) z^n,$$

gdzie $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n}\, d\lambda(z)$ (λ to unormowana miara Lebesgue'a na okręgu) przeprowadza funkcje ciągłe w funkcje ciągłe (tzn. zakładamy, że dla każdej f ciągłej powyższy szereg jest zbieżny punktowo na $\mathbb{T}$ do funkcji ciągłej, którą oznaczamy Tf). Wykaż, że wtedy $T : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ jest operatorem ciągłym (w normie jednostajnej).
Wsk. Wykazać, że operator ten ma wykres domknięty w normie supremum. To znaczy trzeba założyć, że ciąg funkcji ciągłych f_k zbiega jednostajnie do pewnej funkcji f (wtedy oczywiście f jest ciągła), oraz że ciąg Tf_k zbiega jednostajnie do pewnej funkcji g (wtedy g też jest oczywiście ciągła), i wykazać, że $g = Tf$. Z łatwego powodu wystarczy rozpartywać przypadek, gdy f_k zbiegają (jednostajnie) do funkcji zerowej, i wykazywać, że wtedy $g \equiv 0$.
Uwaga: Przyda się obserwacja, że funkcje z^n ($n \in \mathbb{Z}$) stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni Hilberta $L^2(\lambda)$, oraz że liczby $\hat{f}_k(n)$, to współczynniki Fouriera funkcji f_k (czyli $\hat{f}_k(n) = \langle f_k, z^n \rangle$). Jak zachowują się te współczynniki przy zbieżności jednostajnej funkcji f_k (po k) do zera? Dalej zauważyć, że liczby $a_n \hat{f}_k(n)$ to współczynniki Fouriera funkcji Tf_k. Wykazać, że te ostatnie dążą do zera po k (jednostajnie dla wszystkich n). To implikuje zbieżność Tf_k do zera w pewnej topologii (jakiej). Ale zbieżność jednostajna też implikuje ten rodzaj zbieżności, oraz mamy jedyność granicy (z dokładnością do równości λ-p.w., ale jeśli wiadomo, że granica jest ciągła, to jest to dokładność pełna).

ZADANIE 6. Pokazać, że jeśli operator T z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y ma domknięty wykres oraz T^{-1} istnieje, to również T^{-1} ma domknięty wykres.
Wsk. Znaleźć związek pomiędzy wykresami operatorów T i T^{-1}.
(Uwaga! Nie zakładamy zupełności, więc domknięty wykres nie implikuje ograniczoności.)

ZADANIE 7. Niech T_1 i T_2 będą operatorami liniowymi z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y. Załóżmy, że T_1 ma domknięty wykres, a T_2 jest ograniczony. Pokazać, że $T_1 + T_2$ ma domknięty wykres. (Uwaga jak powyżej.)

ZADANIE 8. Pokazać, że jądro operatora liniowego $T : X \to Y$ o wykresie domkniętym jest domkniętą podprzestrzenią w X.

Tomasz Downarowicz